Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1 Exercices

1. **Définition de la dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes uniqument à l'aide de la définition de la dérivée :

   (a)
   $$f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

   (b)
   $$f(x) = \ln x,$$

   (c)
   $$f(x) = \sqrt{1+x^2},$$

2. **Calcul de la dérivée d'une fonction.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a)
   $$f(x) = \frac{x}{1+x^4},$$

   (b)
   $$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2+x^4},$$

   (c)
   $$f(x) = \cos\sqrt{1+x^2},$$

   (d)
   $$f(x) = \sin\sqrt{1+x^2+x^4},$$

   (e)
   $$f(x) = \ln\cos x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

   (f)
   $$f(x) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

(g)
$$f(x) = x^2[x],$$

(h)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(i)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. **Calcul d'une limite.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Calculer
$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}.$$

4. **Calcul des limites I.** Calculer les limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

(c)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

(d)
$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^x - \sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{x - \sqrt{2}}$$

(e)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

(f)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(g)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$$

(h)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

(i)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x - 1}$$

(j)
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x \quad \text{pour } \alpha > 0$$

(k)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \text{pour } \alpha > 0$$

(l)
$$\lim_{x\to\infty} \big(1+\frac{\alpha}{x}\big)^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \text{ réel}$$

(m)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(n)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(\frac{1}{1+x}\big)}{\sin x}$$

5. **La règle de composition.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x^3 + x - 2$$
est bijective. Calculer $(f^{-1})'(0)$.
6. **La règle de composition.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par
$$f(x) = |x^5| + 6\sin x + 1 \quad \text{et} \quad g(y) = \arctan\sqrt{y^2+3}.$$
Calculer $(g \circ f)'(0)$.
7. **La règle de composition.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + 2x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g(y) = \arctan\sqrt{y^2+3}.$$
Calculer $(g \circ f)'(0)$.
8. Montrer que pour tout $x > 0$:
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
9. **Fonction convexe I.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Soient $x_1 < x_2$ et $x \in]x_1, x_2[$. En posant $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ montrer que
$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$
Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.
10. **Fonction convexe II.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est strictement convexe.
11. **Fonction convexe III.** Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = x \ln x$$
    (a) Vérifier que f est convexe

(b) En déduire que pour tout couple a, b de $]0, \infty[$:

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2} \leq a\ln a + b\ln b$$

12. **Fonction convexe IV.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes de classe C^2.
    (a) Montrer que si g est croissante, la fonction composée $g \circ f$ est aussi convexe
    (b) Que devient ce résultat si g n'est pas supposée croissante ?
13. **Fonction concave.** Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction concave telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $a, b \geq 0$
    $$f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$
    Idée : Ecrire $f(a) = f(\frac{a}{a+b}(a+b))$ et $f(b) = f(\frac{b}{a+b}(a+b))$ et appliquer la concavité de f.
    En déduire que pour tout $a, b \geq 0$
    $$1 + \sqrt{1+a+b} \leq \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}.$$
14. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
    $$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 6.$$
15. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
    $$f(x) = x + \sin x + \cos x.$$
16. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
    $$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$
17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = (1 + \sin x)\cos x.$$
    (a) Etudier la nature de ses points stationnaires.
    (b) Trouver ses points d'inflexion.
18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \cos(\pi \sin(\pi x)).$$
    (a) Vérifier que f est une fonction périodique de période $T = 1$.
    (b) Etudier la nature de ses points stationnaires.
19. Trouver les valeurs extremales de la fonction polynomiale
    $$P(x) = x^5 - 5x^4 + 2$$
    dans l'intervalle fermé $[-4, 6]$.

20. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 2x + 2}{x^6 + 2x^2 + x + 1}$$
admet un minimum local en 0.
21. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^2 + 14x + 4}{10x^4 + 8x^2 + 7x + 2}$$
admet un maximum local en 0.
22. Montrer que la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 + x^2}$$
admet un maximum local en 0.
23. **Développement limité I.**
    (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = 2x + \cos x^2.$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de $x = 0$.
    (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \frac{\sin x}{2 + x^2 + x^8}.$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.
    (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \arctan\left(\frac{1 - x}{1 + x^2}\right).$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 1$.
    (d) Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \ln(5 + \arcsin x).$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 0$.
    (e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \cos(\cos x).$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.
    (f) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
    $$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
    Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 100 autour de $x = 0$.

(g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^3(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$.

24. **Calcul des limites II.** Calculer les limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln \cosh x}{\ln^3(1+x)}$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sinh^3 x}$$

(c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \cosh x}$$

(d)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln \sqrt{x}}$$

(e)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2}) \sin(x-1)}{\ln((x-1)^2)}$$

(f)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$$

(g)
$$\lim_{x \to 0+} \frac{x \sin x}{1 + \cos(x - \pi)}$$

25. **Séries entières.**

(a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Idée : Montrer que la fonction $\arctan x$ (respectivement $\operatorname{arctanh} x$) et la série ont la même dérivée.

(b) Pour $x \in]0, 1[$ donner la série entière de

$$\frac{1-x}{x} \ln \frac{1}{1-x}.$$

Montrer ensuite que la série entière converge absolument pour tout $x \in [-1, 1]$.

26. **Etude de fonction.** Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

27. **Etude de fonction.** Etudier la fonction $f :]-\infty, -1] \cup [3, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

28. **Etude de fonction.** Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$f(x) = x^x e^{-x}$$

   (a) Montrer que $x = 1$ est l'unique point stationnaire de la fonction f.
   (b) Etudier sa nature et donner le développement limité d'ordre 4 en ce point.
   (c) Montrer que
$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 1$$
   et calculer
$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - 1}{x \ln x}.$$

5.2 Corrigés

1. **Définition de la dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes uniqument à l'aide de la définition de la dérivée :

   (a)
$$f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$
   Pour tout $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h > 0$:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

   (b)
$$f(x) = \ln x,$$
   Pour tout $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h > 0$:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x\ \frac{h}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{xy} = \frac{1}{x}$$
   en utilisant l'exemple 4 du ch. 4.5.

   (c)
$$f(x) = \sqrt{1 + x^2},$$

Pour tout $x, h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} - \sqrt{1+x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+(x+h)^2 - 1 - x^2}{h(\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h(\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x + h}{\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

2. **Calcul de la dérivée d'une fonction.**

(a)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^4}, \quad f'(x) == \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}.$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2+x^4},$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - \frac{x^2(2x+4x^3)}{(1+x^2+x^4)^2} = \frac{-2x(x^4-1)}{(1+x^2+x^4)^2}.$$

(c)

$$f(x) = \cos\sqrt{1+x^2},$$

$$f'(x) = -\frac{x\sin(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(d)

$$f(x) = \sin\sqrt{1+x^2+x^4},$$

$$f'(x) = \frac{(x+2x^3)\cos\sqrt{1+x^2+x^4}}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$$

(e)

$$f(x) = \ln\cos x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

(f)

$$f(x) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}\big(1 + \frac{(1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x}\big) = \frac{1}{\cos x}.$$

(g)

$$f(x) = x^2[x],$$
$$f'(x) = 2x[x], \text{ si } x \notin \mathbb{Z}$$

car

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2[x+h]-x^2[x]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2[x]-x^2[x]}{h} = 2x[x].$$

et f' n'existe pas si $x \in \mathbb{Z}$ (f n'est pas continue en ces points)

(h)

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Noter que f est dérivable en tout x mais sa fonction dérivée n'est pas une fonction continue en tout x ; elle est discontinue en $x = 0$.

(i)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calcul de $f'(0)$: noter d'abord que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0.$$

Donc pour $h > 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = 0.$$

et similairement pour $h < 0$.

3. **Calcul d'une limite.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Calculer

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}.$$

Noter que

$$\frac{af(x)-xf(a)}{x-a} = \frac{a(f(x)-f(a))-(x-a)f(a)}{x-a} = -f(a) + a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a} = -f(a) + af'(a)$$

Attention ! Vous ne pouvez pas appliquer la règle de l'Hospital en argumentant que

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{af'(x)-f(a)}{1}=-f(a)+af'(a).$$

car pour pouvoir appliquer cette règle il faut que $f'(x)$ existe dans un voisinage du point a (ici on suppose uniquement que f est dérivable en a) et deuxièmement que

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{1}=f'(a)$$

ou autrement dit, que f' est aussi continue en a.

4. **Calcul des limites.**

   (a) Soit en utilisant la définition de la dérivée

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left.\frac{d\,e^x}{d\,x}\right|_{x=0}=1$$

   ou par la règle de l'Hospital (il s'agit d'une expression indéfinie - voir les notes de cours ; les dérivées des fonctions dans le numérateur et dans le dénominateur existent et la deuxième limite dans l'identité suivante existe) :

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1.$$

   Quand on applique dans la suite la règle de l'Hospital on ne vérifie plus explicitement dans ces corrigés les conditions pour pouvoir l'appliquer. Dans une rédaction une telle vérification est obligatoire. Pour les pièges voir l'exercice précédent.

   (b)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{1}=0$$

   (c)
   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{1}=-1.$$

   (d)
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^x-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}}&=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{x\ln x}-e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}}\\&=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(1+\ln x)e^{x\ln x}}{1}=(1+\frac{1}{2}\ln 2)\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

   (e)
   $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{1}=-1$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

(g) Par deux applications consécutives de la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1.$$

(i) Soit par un calcul direct (et longue)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

ou bien en posant $y=\frac{1-x}{1+x}$, donc $x-1=\frac{-2y}{1+y}$ et

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{-(y+1)\arctan y}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\arctan y-\frac{y+1}{1+y^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

(j) Pour tout $\alpha>0$ en posant $x=\frac{1}{y}$ par l'exemple 7 du ch. 4.5 :

$$\lim_{x\to 0+}x^\alpha\ln x=-\lim_{y\to+\infty}y^{-\alpha}\ln y=0$$

(k) Pour tout $\alpha>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$$

par l'exemple 7 du ch. 4.5.

(l) Par la continuité des fonctions puissance :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^\alpha=1.$$

(m) C'est l'exemple 2 du ch. 4.5. Ou bien par n applications consécutives de la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$$

(n)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{\cos x}=-1$$

5. **La règle de composition.** La fonction $f(x)=x^3+x-2$ est strictement croissante car $f'(x)=3x^2+1>0$. Par conséquent, f est injective. La fonction f est surjective, car elle est continue et

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

Noter que $f(1)=0$ donc $f^{-1}(0)=1$. En appliquant la règle

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)}=\frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}}$$

ou

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=b} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

on trouve

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=0} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=1}} = \frac{1}{4}.$$

6. **La règle de composition.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = |x^5| + 6\sin x + 1 \quad \text{et} \quad g(y) = \arctan\sqrt{y^2+3}.$$

Calculer $(g \circ f)'(0)$: Par la règle de composition

$$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(1) \cdot f'(0).$$

Avec

$$f(x) = |x^5| + 6\sin x + 1 \quad \text{et} \quad g(y) = \arctan\sqrt{y^2+3}.$$

on a

$$f'(x) = 5x|x^3| + 6\cos x \quad \text{et} \quad g'(y) = \frac{y}{(y^2+4)\sqrt{y^2+3}}.$$

et par conséquent

$$(g \circ f)'(0) = \frac{1}{10} \cdot 6 = \frac{3}{5}.$$

7. **La règle de composition.** Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + 2x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad g(y) = \arctan\sqrt{y^2+3}.$$

Calculer $(g \circ f)'(0)$: Par l'exercice ci-dessus (la dérivée de g) et en utilisant $f(0) = 0$ (et $f'(0) = 2$ existe)on a

$$(g \circ f)'(0) = 0 \cdot 2 = 0.$$

8. La fonction $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ est dérivable en tout $x > 0$ et pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Par conséquent, f est constante et $f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$.

9. **Fonction convexe I.** Avec $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ on a $t \in]0,1[$ et, de plus,

$$tx_1 + (1-t)x_2 = x$$

et

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

La convexité stricte de f est équivalente à

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Le membre de droite est l'équation du segment passant par les points $(x_1, f(x_1)$ et $(x_2, f(x_2)$ du graphe de f qui se trouve strictement en-dessus du graphe de f pour tout $x \in]x_1, x_2[$.

10. **Fonction convexe II.** $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique que f' est strictement croissante. Soit $x_1 < tx_1 + (1-t)x_2 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis de Lagrange il existent $c_1 \in x_1, tx_1 + (1-t)x_2[, c_2 \in]tx_1 + (1-t)x_2, x_2[$ tels que

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = f'(c_1), \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}$$

(voir cours). Le fait que f' est strictement croissante implique que $f'(c_1) < f'(c_2)$ donc que f est strictement convexe.

11. **Fonction convexe III.**

$$(x \ln x)'' = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x} > 0.$$

Ensuite prendre $t = \frac{1}{2}$.

12. **Fonction convexe IV.**

$$g(f(x))'' = (f'(x)g'(f(x)))' = f''(x)g'(f(x)) + f'(x)^2 g''(f(x)) \geq 0.$$

Si g n'est pas croissante $g(f(x))$ n'est pas forcement convexe. Exemple : $g(x) = -x$ et $f(x) = x^2$ ou bien $g(x) = e^{-x}$ et $f(x) = x^2$.

13. **Fonction concave.** Si $a + b = 0$, alors $a = b = 0$ et l'inégalité est evidente car $f(0) = 0$ par l'hypothèse. Soit alors $a + b \neq 0$. Alors $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \in [0, 1]$ et

$$f(a) = f(\frac{a}{a+b}(a+b) + \frac{b}{a+b} \cdot 0) \geq \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(0)$$

respectivement

$$f(b) = f(\frac{b}{a+b}(a+b) + \frac{a}{a+b} \cdot 0) \geq \frac{b}{a+b} f(a+b) + \frac{a}{a+b} f(0)$$

par la concavité de f. En prenant la somme de deux inégalité on trouve

$$f(a) + f(b) \geq f(a+b) + f(0) = f(a+b).$$

Ensuite noter que $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ est concave et vérifie $f(0) = 0$.

14. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 6.$$

Corrigé.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3, \quad f''(x) = 6x + 10$$

points stationnaires : $x = -3$ maximum local, $x = -1/3$ minimum local.

15. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \sin x + \cos x.$$

Corrigé.

$$f'(x) = 1 + \cos x - \sin x = 1 + sin(x + \pi/2) - \sin x = 1 + \sqrt{2}\sin(\pi/4 - x),$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

points stationnaires : $x = \pi/2 + 2k\pi$, maximums locaux ($f''(\pi/2+2k\pi) = -1$), $x = \pi + 2k\pi$ minimum locaux ($f''(\pi + 2k\pi) = 1$) où k est un entier.

16. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

Corrigé.

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3}.$$

L'équation $f'(x) = 0$ admet une solution positive $x_0 > 0$ par le théorème de la valeur intermédiare car $f'(x)$ est continue et

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Cette solution est unique car $f'(x)$ est strictement croissante pour $x > 0$ (noter que $f''(x) > 0$ si $x > 0$). La fonction f admet un minimum local en ce point. L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution pour $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x^2 - e^{-x}) = \frac{e^x}{x^2}(-x + e^{-x/2})(-x - e^{-x/2}).$$

Les deux premiers facteurs sont positives et en utilisant $e^t > 1 + t + t^2/2$ avec $t = -x/2 > 0$ on a

$$-x - e^{-x/2} < -x - 1 + x/2 - x^2/8 = -(1 - x/4)^2 - x^2/16 < 0.$$

Donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + \sin x)\cos x.$$

(a) Etudier la nature de ses points stationnaires.

(b) Trouver ses points d'inflexion.

Corrigé.

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x.$$

Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $\sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = -1$. Par conséquent, les points stationnaires sont de la forme

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

et

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Avec

$$f''(x) = -(1 + 4\sin x)\cos x.$$

on trouve que f admet des maximums locales strictes en $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ et des minimums locales strictes en $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Les points $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ sont des points d'inflexion car

$$f'''(x) = 4 - \sin x - 8\sin^2 x$$

est nonzéro en ces points. Pour trouver les autres points d'inflexion on doit resoudre l'équation $f''(x) = 0$. La condition $\cos x = 0$ donne également les points $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ qui sont des points d'inflexion. Il y a deux autres familles des points d'inflexion données par la condition $1 + 4\sin x = 0$, i.e.

$$x = \arcsin(-1/4) + 2\pi k$$

et

$$x = \pi - \arcsin(-1/4) + 2\pi k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (toujours $f'''(x) \neq 0$ en ces points).

18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\pi \sin(\pi x)).$$

(a) Vérifier que f est une fonction périodique de période $T = 1$.

(b) Etudier la nature de ses points stationnaires.

Corrigé. On a $f(x+1) = f(x)$ car

$$\begin{aligned}\cos(\pi\sin(\pi(x+1))) &= \cos(\pi\sin(\pi x)\cos\pi + \pi\cos(\pi x)\sin\pi)\\ &= \cos(\pi\sin(\pi x)\cdot(-1) + \pi\cos(\pi x)\cdot 0)\\ &= \cos(-\pi\sin(\pi x))\\ &= \cos(\pi\sin(\pi x))\end{aligned}$$

en notant que cos est une fonction paire. Pour étudier les points stationnaires de f notons que par la règle de composition

$$f'(x) = -\pi^2\sin(\pi\sin(\pi x))\cos(\pi x).$$

Il suffit de trouver les solutions de $f'(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$. Nous avons $\cos(\pi x) = 0$ si et seulement si $x = k + \frac{1}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Donc $x = \frac{1}{2}$. Nous avons $\sin(\pi \sin(\pi x)) = 0$ si et seulement si $\sin(\pi x) \in \{-1, 0, 1\}$. Cette condition donne des points stationnaires en $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. le point stationnaire en $x = 1$ est de même nature que $x = 0$ par la périodicité de f. Pour étudier leur nature nous calculons le developpement limité en ces points : En $x = 0$ nous avons

$$\cos(\pi \sin(\pi h)) \sim 1 - \frac{\pi^2 \sin^2(\pi h)}{2} \sim 1 - \frac{\pi^4 h^2}{2}.$$

Donc f admet un maximum local stricte en $x = 0$ avec $f(0) = 1$. En $x = \frac{1}{2}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(\pi \sin(\pi(\frac{1}{2} + h))) &= \cos(\pi \cos(\pi h)) \\
&= \cos(\pi(1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}) + O(h^4)) \\
&= -\cos(\frac{\pi^3 h^2}{2} + O(h^4)) \\
&= -1 + \frac{\pi^6 h^4}{8} + O(h^6).
\end{aligned}$$

Donc f admet un minimum local stricte en $x = \frac{1}{2}$ avec $f(\frac{1}{2}) = -1$.

19. Trouver les valeurs extremales de la fonction polynomiale

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 2$$

dans l'intervalle fermé $[-4, 6]$.

Corrigé. La fonction f est continue et elle atteint donc son minimum et maximum sur l'intervalle borné et fermé $[-4, 6]$. f est également dérivable donc ses valeurs extrémales se trouvent soit parmi les points stationnaires soit sur le bord de l'intervalle. On a

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3,$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2, f'''(x) = 60x^2 - 120x, f''''(x) = 120x - 120.$$

points stationnaires : $x = 0$ (maximum local $f(0) = 0$) et $x = 4$ (minimum local $f(4) = -254$).
sur le bord : $f(-4) = -2302 = \min f|_{[-4,6]}$ et $f(6) = 1298 = \max f|_{[-4,6]}$.

20. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 2x + 2}{x^6 + 2x^2 + x + 1}$$

admet un minimum local en 0.

Corrigé.

$$f(x) = 2 + 3x^2 - x^3 \frac{2 + 6x + 2x^3 + 3x^5}{x^6 + 2x^2 + x + 1} = 2 + 3x^2 + O(x^3).$$

21. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 14x + 4}{10x^4 + 8x^2 + 7x + 2}$$

admet un maximum local en 0.

Corrigé.

$$f(x) = 2 - \frac{15}{2} x^2 + O(x^3).$$

22. Montrer que la fonction $f :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 + x^2}$$

admet un maximum local en 0.

Corrigé.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}}{1 + x^2} + O(x^3) = \frac{1 - \frac{1}{4}x^2}{1 + x^2} + O(x^3) = 1 - \frac{5}{4}x^2 + O(x^3).$$

23. **Développement limité I.**

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = 2x + \cos x^2.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de $x = 0$.

Corrigé.

$$P_4(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^4$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + x^2 + x^8}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.

Corrigé. Pour obtenir le polynôme de Taylor d'ordre 6 noter que

$$\frac{\sin x}{2 + x^2 + x^8} \sim \frac{\sin x}{2 + x^2} \sim \frac{x - 1/6 * x^3 + 1/120 * x^5}{2 + x^2}$$

Par division on trouve

$$P_6(x) = 1/2 * x - 1/3 * x^3 + 41/240 * x^5$$

et

$$f(x) = 1/2 * x - 1/3 * x^3 + 41/240 * x^5 + O(x^7)$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 1$.

Corrigé. On a

$$\arctan t = t - 1/3 * t^3 + 1/5 * t^5 + O(t^6)$$

Posant

$t = \dfrac{1-x}{1+x^2} = -1/2*(x-1)+1/2*(x-1)^2-1/4*(x-1)^3+1/8*(x-1)^5+O((x-1)^6)$

on trouve

$P_5(x) = -1/2*(x-1)+1/2*(x-1)^2-5/24*(x-1)^3-1/8*(x-1)^4+49/160*(x-1)^5$

$f(x) = -1/2*(x-1)+1/2*(x-1)^2-5/24*(x-1)^3-1/8*(x-1)^4+49/160*(x-1)^5+O((x-1)^6)$

(d) Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln(5 + \arcsin x).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 0$.

Corrigé.

$P_5(x) = \ln 5+1/5*x-1/50*x^2+9/250*x^3-53/7500*x^4+6149/375000*x^5.$

(e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\cos x).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.

Corrigé.

$P_6(x) = \cos(1)+\dfrac{\sin(1)}{2}*x^2+(-\dfrac{\cos(1)}{8}-\dfrac{\sin(1)}{24})*x^4+(1/48*\cos(1)-7/360*\sin(1))*x^6$

(f) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 100 autour de $x = 0$.

Corrigé. Pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k}$$

(g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^3(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$.

Corrigé. $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -1/6$. Donc

$$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3.$$

24. **Calcul des limites II.**

(a) Par un développement limité $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ et $\ln(1+y) = y + O(y^2)$:

$$x \ln \cosh x = x \ln(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)) = x(\frac{x^2}{2} + O(x^4)) = \frac{x^3}{2} + O(x^5)$$

et $\ln^3(1+x) = x^3 + O(x^4)$ on trouve

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln \cosh x}{\ln^3(1+x)} = \frac{1}{2}$$

(b) Par un développement limité $\sinh x = x + O(x^4 3)$ et $\ln(1+y) = y + O(y^2)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sinh^3 x} = 1$$

(c) Par la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \cosh x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} \tanh x} = 1.$$

(d) Par la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^{-3/2} \cos \frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{1}{x}} = -2$$

ou par un développement limité en posant $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ autour de $y = 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln \sqrt{x}} = \lim_{y \to 0_+} \frac{\sin 2y}{\ln(1-y)} = -2$$

(e)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2}) \sin(x-1)}{\ln((x-1)^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln((x-1)^2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 + O((x-1)^3)}{\ln((x-1)^2)} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

car $e^{\frac{1}{x}}$ tends vers l'infini et les autres termes sont bornés.

(g) Par un développement limité

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x \sin x}{1 + \cos(x - \pi)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x \sin x}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x(x + 0(x^3))}{\frac{x^2}{2} + O(x^4)} = 2.$$

25. **Séries entières.**

(a) On démontre que la fonction $\arctan x$ (respectivement $\operatorname{arctanh} x$) et la série ont la même dérivée. En effet,

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

et(noter que la série converge absolument que nous permet commuter la dérivée avec la somme)

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent, la fonction

$$\arctan x - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

est constante sur $]-1,1[$. En particulier,

$$\arctan x - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan 0 - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{0^{2k+1}}{2k+1} = 0.$$

De la même manière pour $\operatorname{arctanh} x$ notant que

$$\frac{d \operatorname{arctanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}.$$

(b) En utilisant

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}, \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[$$

on obtient

$$\ln\frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}, \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[$$

La convergence absolue de cette série nous permet d'effectuer les manipulations suivantes (en particulier,on change l'ordre des termes. où ?) :

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{x}\ln\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}-x^k}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+1} - \frac{x^k}{k} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)}.
\end{aligned}$$

la série entière converge absolument pour tout $x \in [-1, 1]$ par le critère de majoration.

26. **Etude de fonction.** $f(x) = xe^{-x^2}$ est de classe C^∞ avec

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

$$f''(x) = -2x(3 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Points stationnaires : $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (minimum locale stricte, $f(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$) et $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (maximum locale stricte, $f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$). Il s'agit même des extremums globaux car

$$\lim_{n \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Points d'inflexion : $x = 0$ $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

27. **Etude de fonction.** Etudier la fonction $f :]-\infty, -1] \cup [3, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

Corrigé. Sur le bord $f(-1) = f(3) = 0$ et

$$\lim_{n \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

Plus précisement,

$$\lim_{n \to -\infty} f(x) - (1 - x) = 0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x) - (x - 1) = 0$$

donc les asymptotes $y = 1 - x$ lorsque $x \to -\infty$ et $y = x - 1$ $x \to +\infty$. f est de classe C^∞ sur l'ensemble ouvert avec

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{(x + 1)(x - 3)}}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(\sqrt{(x + 1)(x - 3)})^3}$$

f est strictement monotone et strictement concave sur son domaine.

28. **Etude de fonction.**

(a) On note que $f(x) = \exp(x \ln x - x)$ et donc $f'(x) = (\ln x)f(x)$. $x = 1$ est l'unique point stationnaire de la fonction f car $f(x) > 0$ et $\ln x$ est strictement croissante.

(b) f admet un minimum local stricte en $x = 1$ car $f'(x) < 0$ si $x < 1$ et $f'(x) > 0$ si $x > 1$. Le développement limité d'ordre 4 en ce point est donné par

$$f(x) = e^{-1}\big(1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{6}(x - 1)^3 + \frac{5}{24}(x - 1)^4\big)$$

(c) En utilisant que $x \ln x \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$ (voir chapitre 4 du cours) on a par la continuité de la fonction exponentielle que

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 1.$$

Par la règle de l'Hospital (les conditions pour son application sont vérifiées) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - 1}{x \ln x} &= \lim_{x \to 0_+} \frac{f'(x)}{1 + \ln x} \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{(\ln x) f(x)}{1 + \ln x} \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln x}{1 + \ln x} \lim_{x \to 0_+} f(x) = 1 \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \lim_{x \to 0_+} f(x) = 1.
\end{aligned}$$