Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1 Exercices

1. **Définition de la dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes uniqument à l'aide de la définition de la dérivée :
   (a)
   $$f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$
   (b)
   $$f(x) = \ln x,$$
   (c)
   $$f(x) = \sqrt{1 + x^2},$$
2. **Calcul de la dérivée d'une fonction.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a)
   $$f(x) = \frac{x}{1 + x^4},$$
   (b)
   $$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2 + x^4},$$
   (c)
   $$f(x) = \cos \sqrt{1 + x^2},$$
   (d)
   $$f(x) = \sin \sqrt{1 + x^2 + x^4},$$
   (e)
   $$f(x) = \ln \cos x, \quad x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$
   (f)
   $$f(x) = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

(g)
$$f(x) = x^2[x],$$

(h)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(i)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. **Calcul d'une limite.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Calculer
$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}.$$

4. **Calcul des limites I.** Calculer les limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

(c)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

(d)
$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^x - \sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{x - \sqrt{2}}$$

(e)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

(f)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(g)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$$

(h)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

(i)
$$\lim_{x \to 1} \frac{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x - 1}$$

(j)
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x \quad \text{pour } \alpha > 0$$

(k)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\quad \text{pour } \alpha>0$$

(l)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha\quad \text{pour tout } \alpha \text{ réel}$$

(m)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}\quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

(n)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x}$$

5. **La règle de composition.** Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x)=x^3+x-2$$
est bijective. Calculer $(f^{-1})'(0)$.
6. **La règle de composition.** Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par
$$f(x)=|x^5|+6\sin x+1\quad \text{et}\quad g(y)=\arctan\sqrt{y^2+3}.$$
Calculer $(g\circ f)'(0)$.
7. **La règle de composition.** Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par
$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+2x & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\quad \text{et}\quad g(y)=\arctan\sqrt{y^2+3}.$$
Calculer $(g\circ f)'(0)$.
8. Montrer que pour tout $x>0$:
$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$
9. **Fonction convexe I.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Soient $x_1<x_2$ et $x\in]x_1,x_2[$. En posant $t=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ montrer que
$$f(x)<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$
Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.
10. **Fonction convexe II.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f''(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement convexe.
11. **Fonction convexe III.** Soit $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x)=x\ln x$$
   (a) Vérifier que f est convexe

   (b) En déduire que pour tout couple a, b de $]0, \infty[$:

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2} \leq a\ln a + b\ln b$$

12. **Fonction convexe IV.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes de classe C^2.
   (a) Montrer que si g est croissante, la fonction composée $g \circ f$ est aussi convexe
   (b) Que devient ce résultat si g n'est pas supposée croissante ?
13. **Fonction concave.** Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction concave telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $a, b \geq 0$

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

   Idée : Ecrire $f(a) = f(\frac{a}{a+b}(a+b))$ et $f(b) = f(\frac{b}{a+b}(a+b))$ et appliquer la concavité de f.
   En déduire que pour tout $a, b \geq 0$

$$1 + \sqrt{1+a+b} \leq \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b}.$$

14. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 6.$$
15. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = x + \sin x + \cos x.$$
16. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$
17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + \sin x)\cos x.$$

   (a) Etudier la nature de ses points stationnaires.
   (b) Trouver ses points d'inflexion.
18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\pi \sin(\pi x)).$$

   (a) Vérifier que f est une fonction périodique de période $T = 1$.
   (b) Etudier la nature de ses points stationnaires.
19. Trouver les valeurs extremales de la fonction polynomiale

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 2$$

   dans l'intervalle fermé $[-4, 6]$.

20. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 2x + 2}{x^6 + 2x^2 + x + 1}$$

admet un minimum local en 0.

21. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 14x + 4}{10x^4 + 8x^2 + 7x + 2}$$

admet un maximum local en 0.

22. Montrer que la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 + x^2}$$

admet un maximum local en 0.

23. **Développement limité I.**
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = 2x + \cos x^2.$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de $x = 0$.

   (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = \frac{\sin x}{2 + x^2 + x^8}.$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.

   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = \arctan\left(\frac{1 - x}{1 + x^2}\right).$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 1$.

   (d) Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = \ln(5 + \arcsin x).$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 5 autour de $x = 0$.

   (e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = \cos(\cos x).$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de $x = 0$.

   (f) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

   Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 100 autour de $x = 0$.

(g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^3(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$.

24. **Calcul des limites II.** Calculer les limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \ln \cosh x}{\ln^3(1+x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sinh^3 x}$$

(c)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \cosh x}$$

(d)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin \frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln \sqrt{x}}$$

(e)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2}) \sin(x-1)}{\ln((x-1)^2)}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x \sin x}{1 + \cos(x-\pi)}$$

25. **Séries entières.**

(a) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Idée : Montrer que la fonction $\arctan x$ (respectivement $\operatorname{arctanh} x$) et la série ont la même dérivée.

(b) Pour $x \in]0,1[$ donner la série entière de

$$\frac{1-x}{x} \ln \frac{1}{1-x}.$$

Montrer ensuite que la série entière converge absolument pour tout $x \in [-1,1]$.

26. **Etude de fonction.** Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = xe^{-x^2}.$$
27. **Etude de fonction.** Etudier la fonction $f :]-\infty, -1] \cup [3, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$
28. **Etude de fonction.** Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$f(x) = x^x e^{-x}$$
   (a) Montrer que $x = 1$ est l'unique point stationnaire de la fonction f.
   (b) Etudier sa nature et donner le développement limité d'ordre 4 en ce point.
   (c) Montrer que
   $$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 1$$
   et calculer
   $$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - 1}{x \ln x}.$$

5.2 Corrigés

1. **Définition de la dérivée.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes uniqument à l'aide de la définition de la dérivée :
   (a)
   $$f(x) = \frac{1}{x}, \ x > 0$$
   Pour tout $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h > 0$:
   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$
   (b)
   $$f(x) = \ln x,$$
   Pour tout $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h > 0$:
   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \ \frac{h}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{xy} = \frac{1}{x}$$
   en utilisant l'exemple 4 du ch. 4.5.
   (c)
   $$f(x) = \sqrt{1 + x^2},$$