

Chapitre 6

Calcul intégral

6.1 Exercices

1. Intégrales définies et indéfinies I.

(a) Soit $b > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{b}} \arctan \sqrt{bx}$$

est une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{(1+bx)\sqrt{x}}.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer

$$\int_0^x |t| dt.$$

(c) Pour $a \in \mathbb{R}$ calculer

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+2\pi} \sin x dx, & \int_a^{a+2\pi} \cos x dx, \\ & \int_a^{a+\pi} \sin x dx, & \int_a^{a+\pi} \cos x dx, \\ & \int_a^{a+2\pi} \sin x \cos x dx, & \int_a^{a+\pi} \sin x \cos x dx. \end{aligned}$$

(d) Calculer

$$\int_0^1 x^2(x^3 - 1)^{39} dx.$$

(e) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{2 - \cos \pi x} dx$$

- (f) * Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de période $T > 0$. Soit F définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que F est périodique avec période T si et seulement si

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

2. Intégrales indéfinies.

(a)

$$\int \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt$$

(b)

$$\int e^{\sqrt{t+1}} dt$$

(c)

$$\int \frac{\sinh t}{e^t + 1} dt$$

(d)

$$\int \frac{1}{\cosh t} dt$$

(e)

$$\int \frac{e^t}{\cosh t} dt$$

(f)

$$\int \arctan t dt$$

(g)

$$\int \arctan(\sqrt{t}) dt$$

(h)

$$\int \arcsin^2 t dt$$

(i)

$$\int t \sin t^2 dt$$

(j)

$$\int t^3 \cos t^2 dt$$

(k)

$$\int t^2 \cos^2 t dt$$

$$(l) \quad \int \frac{\sin t}{1 + \cos t + \tan^2 t} dt$$

$$(m) \quad \int \frac{1}{\cos t - \sin t + 1} dt$$

3. Intégrales indéfinies.

$$(a) \quad \int e^t \sin t dt$$

$$(b) \quad \int \sin(\ln t) dt$$

$$(c) \quad \int t \ln \sqrt{t} dt$$

$$(d) \quad \int (1+t)^2 \ln t dt$$

$$(e) \quad \int t^2 \ln^2 t dt$$

$$(f) \quad \int \ln^3 t dt$$

$$(g) \quad \int t \ln(1+t) dt$$

$$(h) \quad \int \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$$

$$(i) \quad \int \frac{\sin t}{1 + \sin t} dt$$

$$(j) \quad \int \sin^7 t \cos t dt$$

$$(k) \quad \int \frac{\sin 2t}{2 + \sin t} dt$$

$$(l) \quad \int \frac{\sin t}{2 + \cos^2 t} dt$$

- (m)
$$\int^x \frac{\sin^2 t \cos t}{1 + \sin^2 t} dt$$
- (n)
$$\int^x \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} dt$$
- (o)
$$\int^x (1+t^2)\sqrt{t} dt$$
- (p)
$$\int^x t^5 \sqrt{1-t^3} dt$$
- (q)
$$\int^x \frac{\sqrt{t+1}}{t} dt$$
- (r)
$$\int^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} dt$$
- (s)
$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t(4-t)}} dt$$
- (t)
$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-3t}} dt$$

4. **Intégrales définies pour la règle du trapèze.** Soient $a < b$ et $\mu = \frac{a+b}{2}$. Donner les intégrales suivantes :

$$\int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{2} dx$$

$$\int_a^\mu \frac{(x-a)^2}{2} dx + \int_\mu^b \frac{(b-x)^2}{2} dx$$

5. **Fonction primitive de la fonction réciproque.** Soient f une fonction inversible, f^{-1} sa fonction réciproque et F une primitive de f . Montrer que la fonction $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ est une primitive de f^{-1} . En déduire les primitives de $\ln x$, $\arcsin x$, $\arctan x$.

6. Intégrales définies et indéfinies II.

Formules utiles.

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b - \arctan a$$

Calculer les intégrales :

(a)

$$\int \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} dt$$

(b)

$$\int \frac{t^5 + 1}{t^3 + 1} dt$$

(c)

$$\int \frac{t^4}{t^3 + 1} dt$$

(d)

$$\int \frac{t^5 + t^3 + t}{t^4 + 1} dt$$

(e)

$$\int \frac{1}{t^4 + t} dt$$

7. Intégrales généralisées I.

(a)

$$\int_0^1 t \ln t dt$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 6t + 10} dt$$

(d)

$$\int_1^{+\infty} \frac{3t - 1}{t(4t^2 + 1)} dt$$

(e)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

(f)

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$$

(g)

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt$$

(h)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t-1}} dt$$

(i)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt$$

8. Intégrales généralisées II.

(a)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$$

(b)

$$\int_0^1 \ln t dt$$

(c)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

(d)

$$\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

(e)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh t} dt$$

(f)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$$

(g)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$$

9. Intégrales généralisées III - Étude de convergence. Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

(b)

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$$

- (c)
$$\int_0^{\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt$$
- (d)
$$\int_0^1 t^\alpha \ln t dt$$
- (e)
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$$
- (f)
$$\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$$

10. Intégrales généralisées et la fonction Gamma.

La fonction Gamma - Formules utiles. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$$

Intégrale de Gauss.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

(a) Soient μ, σ deux nombres réels et $\sigma > 0$. Calculer les intégrales généralisées

i.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ii.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

iii.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

(b) Soient $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les intégrales (en terme de la fonction Gamma)

i.

$$\int_0^\infty (t^n + 1)(t^n - 1)e^{-yt} dt$$

ii.

$$\int_0^1 (-\ln t)^{y-1} dt$$

iii.

$$\int_1^\infty \sqrt{t-1} e^{-t} dt$$

(c) Soient $x > 0$ et $k, n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Idée : Utiliser la formule de Stirling pour $n!$ et $(n-k)!$ et le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

6.2 Corrigés

1. **Intégrales définies et indéfinies I.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes uniquement à l'aide de la définition de la dérivée :

(a) Soit $b > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{b}} \arctan \sqrt{bx}$$

est une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{(1+bx)\sqrt{x}}.$$

Corrigé. Vérifier que $F'(x) = f(x)$.

(b)

$$\int_0^x |t| dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(c) Pour $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x dx = \cos a - \cos(a+2\pi) = 0,$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos x dx = \sin(a+2\pi) - \sin a = 0,$$

$$\int_a^{a+\pi} \sin x dx = \cos a - \cos(a+\pi) = 2 \cos a,$$

$$\int_a^{a+\pi} \cos x dx = \sin(a+\pi) - \sin a = -2 \sin a$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_a^{a+2\pi} = 0,$$

$$\int_a^{a+\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_a^{a+\pi} = 0,$$

(d)

$$\int_0^1 x^2(x^3-1)^{39} dx = \frac{(x^3-1)^{40}}{120} \Big|_0^1 = -\frac{1}{120}$$

(e)

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{2 - \cos \pi x} dx = \ln(2 - \cos \pi x) \Big|_0^1 = \frac{\ln 3}{\pi}.$$

(f) * Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de période $T > 0$. Soit F définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que F est périodique avec période T si et seulement si

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Corrigé. Si F est périodique avec période T , alors

$$0 = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt.$$

Si $\int_0^T f(t) dt = 0$, on note que

$$\frac{d(F(x+T) - F(x))}{dx} = f(x+T) - f(x) = 0,$$

i.e. $F(x+T) - F(x)$ est constante. Donc

$$F(x+T) - F(x) = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt = 0$$

pour tout x , i.e. F est périodique avec période T .

2. Intégrales indéfinies.

(a)

$$\int \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt = -\ln(1 + \cos x)$$

(b)

$$\int^x e^{\sqrt{t+1}} dt = \int^{\sqrt{x+1}} 2s e^s ds = 2(\sqrt{x+1} - 1)e^{\sqrt{x+1}}$$

(c) Noter que

$$\frac{\sinh t}{e^t + 1} = \frac{1}{2} e^{-t} \frac{e^{2t} - 1}{e^t + 1} = \frac{1 - e^{-t}}{2}$$

donc

$$\int^x \frac{\sinh t}{e^t + 1} dt = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

(d)

$$\int^x \frac{1}{\cosh t} dt = 2 \int^{e^x} \frac{1}{1 + s^2} ds = 2 \arctan(e^x).$$

(e) Noter que $e^x = \cosh x + \sinh x$ donc

$$\int^x \frac{e^t}{\cosh t} dt = \int^x 1 + \frac{\sinh x}{\cosh t} dt = x + \ln(\cosh x)$$

(f)

$$\int^x \arctan t dt = \int^x (t)' \arctan t dt = x \arctan x - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

(g)

$$\begin{aligned}
 \int^x \arctan(\sqrt{t}) dt &= \int^{\sqrt{x}} 2s \arctan s ds \\
 &= \int^{\sqrt{x}} (s^2)' \arctan s ds \\
 &= x \arctan(\sqrt{x}) - \int^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{1+s^2} ds \\
 &= x \arctan(\sqrt{x}) - \int^{\sqrt{x}} 1 - \frac{1}{1+s^2} ds \\
 &= x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x})
 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
 \int^x \arcsin^2 t dt &= \int^x (t)' \arcsin^2 t dt \\
 &= x \arcsin^2 x - \int^x \frac{2t \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= x \arcsin^2 x - 2 \int^x (-\sqrt{1-t^2})' \arcsin t dt \\
 &= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int^x \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x
 \end{aligned}$$

(i) On voit que

$$\int^x t \sin t^2 dt = -\frac{\cos x^2}{2}$$

ou bien par un changement de variable $s = t^2$:

$$\int^x t \sin t^2 dt = \int^{x^2} \frac{\sin s}{2} ds = -\frac{\cos x^2}{2}.$$

(j) Par une intégration par partie et l'exercice précédent

$$\int^x t^3 \cos t^2 dt = \int^x t^2 \left(\frac{1}{2} \sin t^2\right)' dt = \frac{x^2 \sin x^2}{2} - \int^x t \sin t^2 dt = \frac{x^2 \sin x^2 + \cos x^2}{2}$$

ou par un changement de variable et une intégration par partie

$$\begin{aligned}
 \int^x t^3 \cos t^2 dt &= \int^{x^2} \frac{s \cos s}{2} ds \\
 &= \int^{x^2} \frac{s(\sin s)'}{2} ds \\
 &= \frac{x^2 \sin x^2}{2} - \int^{x^2} \sin s ds \\
 &= \frac{x^2 \sin x^2 + \cos x^2}{2}
 \end{aligned}$$

(k) Par deux intégrations par partie successives :

$$\begin{aligned}
 I &:= \int^x t^2 \cos^2 t \, dt = \int^x t^2 \cos t (\sin t)' \, dt \\
 &= x^2 \cos x \sin x - 2 \int^x t \cos t \sin t \, dt + \int^x t^2 \sin^2 t \, dt \\
 &= x^2 \cos x \sin x - \int^x t (\sin^2 t)' \, dt + \int^x t^2 (1 - \cos^2 t) \, dt \\
 &= x^2 \cos x \sin x - x \sin^2 x + \int^x \sin^2 t \, dt + \int^x t^2 \, dt - I \\
 &= x^2 \cos x \sin x - x \sin^2 x + \frac{x - \sin x \cos x}{2} + \frac{x^3}{3} - I
 \end{aligned}$$

avec le résultat du cours pour $\int^x \sin^2 t \, dt$. Par conséquent,

$$2 \int^x t^2 \cos^2 t \, dt = x^2 \cos x \sin x - x \sin^2 x + \frac{x - \sin x \cos x}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(l) Noter que $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$, donc

$$\frac{\sin t}{1 + \cos t + \tan^2 t} = \frac{\sin t \cos^2 t}{1 + \cos^3 t}$$

et par conséquent

$$\int^x \frac{\sin t}{1 + \cos t + \tan^2 t} \, dt = -\frac{1}{3} \ln(1 + \cos^3 x)$$

(m)

$$\int^x \frac{1}{\cos t - \sin t + 1} \, dt$$

Les intégrands contenant des fonctions trigonométriques $R(\sin t, \cos t, \tan t, \cot t)$ peuvent être transformés dans des intégrands algébriques par le changement de variable

$$z = \tan \frac{t}{2}$$

En effet, nous avons

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \tan \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\tan t = \frac{2z}{1-z^2}$$

et

$$\frac{dt}{dz} = \frac{2}{1+z^2}.$$

Donc

$$\int^x R(\sin t, \cos t, \tan t, \cot t) dt = \int^{\tan \frac{x}{2}} R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1-z^2}, \frac{1-z^2}{2z}\right) \frac{2}{1+z^2} dz$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\cos t - \sin t + 1} dt &= \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{1+z^2}{2(1-z)} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz \\ &= \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{1}{1-z} dz \\ &= -\ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| \end{aligned}$$

3. Intégrales indéfinies.

(a) Par deux intégrations par partie (voir cours) on trouve que

$$\int^x e^t \sin t dt = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

(b) Avec le changement de variable $s = \ln t$ i.e. $t = e^s$ et l'exercice précédent

$$\int^x \sin(\ln t) dt = \int^{\ln x} e^s \sin s ds = \frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \int^x t \ln \sqrt{t} dt &= \frac{1}{2} \int^x t \ln t dt \\ &= \frac{1}{4} \int^x (t^2)' \ln t dt \\ &= \frac{x^2 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int^x t^2 \cdot t^{-1} dt \\ &= \frac{2x^2 \ln x - x^2}{8} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \int^x (1+t)^2 \ln t dt &= \frac{1}{3} \int^x ((1+t)^3)' \ln t dt \\ &= \frac{(1+t)^3 \ln t}{3} - \frac{1}{3} \int^x \frac{(1+t)^3}{t} dt \\ &= \frac{(1+t)^3 \ln t - \ln t - \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t}{3} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \int^x t^2 \ln^2 t dt &= \frac{1}{3} \int^x (t^3)' \ln^2 t dt \\ &= \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{3} \int^x t^2 \ln t dt \\ &= \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9} \int^x (t^3)' \ln t dt \\ &= \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2x^3 \ln x}{9} + \frac{2}{9} \int^x t^2 dt \\ &= \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2x^3 \ln x}{9} + \frac{2x^3}{27} \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
 \int^x \ln^3 t \, dt &= \int^x (t)' \ln^3 t \, dt \\
 &= x \ln^3 x - 3 \int^x \ln^2 t \, dt \\
 &= \dots \\
 &= x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x
 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
 \int^x t \ln(1+t) \, dt &= \frac{1}{2} \int^x (t^2)' \ln(1+t) \, dt \\
 &= \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2} \int^x \frac{t^2}{1+t} \, dt \\
 &= \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2} \int^x t - 1 + \frac{1}{1+t} \, dt \\
 &= \frac{x^2 \ln(1+x) - \ln(1+x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
 \int^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} \, dt &= - \int^x ((1+t)^{-1})' \ln t \, dt \\
 &= -\frac{\ln x}{1+x} + \int^x \frac{1}{t(1+t)} \, dt \\
 &= -\frac{\ln x}{1+x} + \int^x \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \, dt \\
 &= \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)
 \end{aligned}$$

(i) Soit par le changement de variable de l'exercice 13 donné par $z = \tan \frac{t}{2}$, i.e.

$$\sin t = \frac{2z}{1+z^2}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \int^x \frac{\sin t}{1+\sin t} \, dt &= \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{4z}{(1+z)^2(1+z^2)} \, dz \\
 &= \int^{\tan \frac{x}{2}} \frac{2}{1+z^2} - \frac{2}{(1+z)^2} \, dz \\
 &= \frac{2}{1+z} + 2 \arctan z \Big|_{\tan \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x
 \end{aligned}$$

ou bien par une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\sin t}{1 + \sin t} dt &= \int^x \frac{(-\cos t)'}{1 + \sin t} dt \\ &= \frac{-\cos x}{1 + \sin x} - \int^x \frac{\cos^2 t}{(1 + \sin t)^2} dt \\ &= \frac{-\cos x}{1 + \sin x} - \int^x \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} dt \\ &= \frac{-\cos x}{1 + \sin x} - \int^x \frac{1}{1 + \sin t} dt + \int^x \frac{\sin t}{1 + \sin t} dt \end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\int^x \frac{1}{1 + \sin t} dt = \frac{-\cos x}{1 + \sin x}$$

et par conséquent que

$$\int^x \frac{\sin t}{1 + \sin t} dt = \int^x 1 - \frac{1}{1 + \sin t} dt = x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

(j)

$$\int^x \sin^7 t \cos t dt = \frac{\sin^8 x}{8}$$

(k)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\sin 2t}{2 + \sin t} dt &= \int^x \frac{2 \sin t \cos t}{2 + \sin t} dt \\ &= \int^x 2 \cos t - \frac{4 \cos t}{2 + \sin t} dt \\ &= 2 \sin x - 4 \ln(2 + \sin x) \end{aligned}$$

(l) En utilisant le changement de variable $s = \cos t$ on trouve

$$\int^x \frac{\sin t}{2 + \cos^2 t} dt = - \int^{\cos x} \frac{1}{2 + s^2} ds$$

Un deuxième changement de variable $s = \sqrt{2}z$ (idéalement on fait les deux changements de variable en un temps) nous donne

$$\int^x \frac{\sin t}{2 + \cos^2 t} dt = - \int^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2(1 + z^2)} dz = - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)$$

(m) Par le changement de variable $s = \sin t$:

$$\int^x \frac{\sin^2 t \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int^{\sin x} \frac{s^2}{1 + s^2} ds = \sin x - \arctan(\sin x)$$

(n) Par le changement de variable $t = s^2$:

$$\int^x \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} dt = 2 \int^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+s^2} ds = 2 \arctan \sqrt{x}$$

(o)

$$\int^x (1+t^2)\sqrt{t} dt = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$$

(p) Par le changement de variable $t^3 = s$:

$$\begin{aligned} \int^x t^5 \sqrt{1-t^3} dt &= \frac{1}{3} \int^{x^3} s \sqrt{1-s} ds \\ &= \frac{1}{3} \int^{x^3} (1-s)^{1/2} - (1-s)^{3/2} ds \\ &= -\frac{2(1-x^3)^{3/2}}{9} + \frac{2(1-x^3)^{5/2}}{15} \end{aligned}$$

(q) Par le changement de variable $t = s^2 - 1$:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\sqrt{t+1}}{t} dt &= \int^x \frac{1}{\sqrt{t+1}} + \frac{1}{t\sqrt{t+1}} dt \\ &= 2\sqrt{x+1} - \int^{\sqrt{x+1}} \frac{2}{1-s^2} ds \\ &= 2\sqrt{x+1} - 2 \operatorname{arctanh} \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

(r) Par une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2} dt &= \int^x (-t^{-1})' \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} + \int^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x} + \operatorname{arcsinh} x \end{aligned}$$

(s)

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t(4-t)}} dt = \int^x \frac{1}{\sqrt{4-(t-2)^2}} dt = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

(t)

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-3t}} dt = \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-3x} \right|$$

4. **Intégrales définies pour la règle du trapèze.** Soient $a < b$ et $\mu = \frac{a+b}{2}$. Donner les intégrales suivantes :

$$\int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{2} dx = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

$$\int_a^\mu \frac{(x-a)^2}{2} dx + \int_\mu^b \frac{(b-x)^2}{2} dx = \frac{(b-a)^3}{48} + \frac{(b-a)^3}{48} = \frac{(b-a)^3}{24}$$

5. **Fonction primitive de la fonction réciproque.** Soient f une fonction inversible, f^{-1} sa fonction réciproque et F une primitive de f . Montrer que la fonction $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ est une primitive de f^{-1} . En déduire les primitives de $\ln x$, $\arcsin x$, $\arctan x$.

$$G'(x) = f^{-1}(x) + x \frac{d f^{-1}(x)}{dx} - \frac{d f^{-1}(x)}{dx} f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x).$$

(a) $\ln x$:

$$G(x) = x \ln x - e^{\ln x} = x \ln x - x.$$

(b) $\arcsin x$:

$$G(x) = x \arcsin x + \cos(\arcsin x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

(c) $\arctan x$:

$$\begin{aligned} G(x) &= x \arctan x + \ln(\cos(\arctan x)) \\ &= x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(\cos^2(\arctan x)) \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2(\arctan x)) \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2). \end{aligned}$$

6. Intégrales définies et indéfinies II.

(a)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} dt &= \int^x t + \frac{-t + 1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \arctan x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^5 + 1}{t^3 + 1} dt &= \int^x t^2 + \frac{-t^2 + 1}{t^3 + 1} dt \\ &= \int^x t^2 - \frac{t - 1}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \int^x t^2 - \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^4}{t^3 + 1} dt &= \int^x \frac{(t^4 + t) - (t + 1) + 1}{t^3 + 1} dt \\ &= \int^x t - \frac{1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{3} \frac{t - 2}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \int^x t - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{3} \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \ln(x + 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t^5 + t^3 + t}{t^4 + 1} dt &= \int^x t + \frac{t^3}{t^4 + 1} dt \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{t^4 + t} dt &= \int^x \frac{1}{t} - \frac{t^2}{t^3 + 1} dt \\ &= \ln(x) - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \end{aligned}$$

7. Intégrales généralisées I.

(a)

$$\int_0^1 t \ln t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2)' \ln t dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 t dt = -\frac{1}{4}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \pi$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 6t + 10} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+3)^2 + 1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$$

(d)

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{3t-1}{t(4t^2+1)} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{3}{4t^2+1} - \frac{1}{t} + \frac{4t}{4t^2+1} dt \\ &= \frac{3}{2} \arctan(2t) \Big|_1^{\infty} + \left(-\ln t + \frac{1}{2} \ln(4t^2+1) \right) \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{3}{2} \arctan(2t) \Big|_1^{\infty} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t^2+1}{t^2} \right) \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} \arctan(2) + \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(5) \end{aligned}$$

(e)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

(f)

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = 2\sqrt{t-1} \Big|_1^2 = 2$$

(g)

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt = \int_1^2 \sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \frac{8}{3}$$

(h) Par le changement de variable $s = \sqrt{t-1}$, i.e. $t = s^2 + 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t-1}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \pi$$

(i) Par le changement de variable $s = \sqrt{t}$, i.e. $t = s^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \pi$$

8. Intégrales généralisées II.

(a) Par le changement de variable $s = \sqrt{t}$, i.e. $t = s^2$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2se^{-s} ds = 2\Gamma(2) = 2$$

(b)

$$\int_0^1 \ln t dt = \int_0^1 (t)' \ln t dt = - \int_0^1 1 dt = -1$$

(c)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \ln t (-t^{-1})' dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$$

(d) Par deux intégrations par partie

$$\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{5}{e}$$

(e) Par le changement de variable $s = e^t$, i.e. $t = \ln s$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t}{1+e^{2t}} dt = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} dt = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(f)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt = \frac{\arctan^2 t}{2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

(g)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt = -\frac{\arctan t}{t} \Big|_0^{\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

9. **Intégrales généralisées III - Étude de convergence.** Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes

(a)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

converge si $\alpha < 1$ est diverge sinon.

(b)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

converge si $\alpha > 1$ est diverge sinon.

(c)

$$\int_0^{\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt$$

converge si $-1 < \alpha < 0$ est diverge sinon.

(d)

$$\int_0^1 t^\alpha \ln t dt$$

converge si $-1 < \alpha$ est diverge sinon.

(e)

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$$

converge si $\alpha < 1$ est diverge sinon.

(f)

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$$

converge si $\alpha > 1$ est diverge sinon.

10. Intégrales généralisées et la fonction Gamma.

La fonction Gamma - Formules utiles. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$$

Intégrale de Gauss.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

(a) Soient μ, σ deux nombres réels et $\sigma > 0$. Calculer les intégrales généralisées

i.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ii.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

iii.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Corrigé. On utilise l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Par le changement de variable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, i.e. $x = \sigma y + \mu$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (\sigma y + \mu) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \mu \end{aligned}$$

car la fonction intégrable $\sigma y e^{-\frac{y^2}{2}}$ est impair, donc son intégrale sur \mathbb{R} est zéro.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (\sigma y + \mu)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma^2 y^2 + \mu^2) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

car la fonction intégrable $\sigma y e^{-\frac{y^2}{2}}$ est impair, donc son intégrale sur \mathbb{R} est zéro. Par une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y \frac{d}{dy} (-e^{-\frac{y^2}{2}}) dy \\ &= -y e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 + \mu^2$$

(b) Soient $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

i. Par le changement de variable $s = yt$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (t^n + 1)(t^n - 1)e^{-yt} dt &= \int_0^{\infty} (t^{2n} - 1)e^{-yt} dt \\ &= y^{-2n-1} \int_0^{\infty} s^{2n} e^{-s} ds - y^{-1} \int_0^{\infty} e^{-s} ds \\ &= y^{-2n-1} \Gamma(2n + 1) - y^{-1} \end{aligned}$$

ii. Par le changement de variable $s = -\ln t$, i.e. $t = e^{-s}$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-\ln t)^{y-1} dt &= \int_\infty^0 s^{y-1} \frac{dt}{ds} ds \\ &= - \int_\infty^0 s^{y-1} e^{-s} ds \\ &= \int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} ds = \Gamma(y) \end{aligned}$$

iii. Par le changement de variable $s = t - 1$, i.e. $t = s + 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \sqrt{t-1} e^{-t} dt &= \int_0^\infty \sqrt{s} e^{-s-1} ds \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2e} \end{aligned}$$

(c) Soient $x > 0$ et $k, n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Idée : Utiliser la formule de Stirling pour $n!$ et $(n-k)!$ et le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Corrigé. Par la formule de Stirling nous avons pour $n \rightarrow \infty$ et k fixe

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

et

$$(n-k)! \sim \sqrt{2\pi} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-n+k}$$

Donc

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} &\sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}} x^k}{(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} n^k e^k k!} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{x^k}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} e^k k!} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k} = \frac{x^k e^{-x}}{e^{-k} e^k k!} = \frac{x^k e^{-x}}{k!}.$$

Annexe A

Dérivées et primitives de fonctions usuelles

Annexe B

Intégrales généralisées